

REFLEXÕES SOBRE O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO CONTRIBUIÇÃO PARA A MELHORIA DO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA (NÍVEL 1º E 2º GRAUS)¹

José Roberto Boettger GIARDINETTO²

RESUMO O objetivo deste artigo é apresentar algumas considerações sobre a utilização da história da matemática para melhoria do ensino desta ciência, para o caso específico do ensino da geometria analítica. Apresenta, como premissa para compreensão da utilização da história, a necessária diferenciação entre a função metodológica desempenhada pela investigação histórica no momento da fundamentação teórica do professor e a função metodológica da investigação histórica no momento da elaboração e execução de procedimentos de ensino. Nesse sentido, tece considerações sobre o desenvolvimento histórico da geometria analítica e sua possibilidade interventora na execução e elaboração de procedimentos de ensino para efetiva compreensão do caráter relacional entre álgebra e geometria implícito na geometria analítica.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática; História da Matemática; História da Geometria Analítica.

ABSTRACT: REFLECTIONS ABOUT THE USE OF THE HISTORY OF THE MATHEMATICS AS A CONTRIBUTION TO IMPROVE THE TEACHING OF ANALYTIC GEOMETRY (1st AND 2nd DEGREES)

The purpose of this article is to present some considerations on the use of history of mathematics to make better the teaching of this science, for the specific case of analytic geometry. It presents, as a premise for the comprehension of the use of history, the necessary differentiation between the methodological function of the historical investigation at the moment of the theoretical fundamentation by the teacher and the methodological function of the historical investigation at the moment of elaboration and execution of the proceedings of teaching. According to this these ideas, presents considerations about the historical development of the analytic geometry and its possibility of intervention in the execution and elaboration of procedures of teaching for the effective understanding of the relational character between algebra and geometry which is implicit in analytic geometry.

KEY-WORDS: Mathematical Education; History of Mathematics; History of Analytic Geometry.

¹Esse artigo versa uma parte da dissertação de mestrado do autor defendida em 1991 na Universidade Federal de São Carlos. Programa de Pós-Graduação em Educação. Em 1994, tendo como referência essa dissertação, o autor publicou um artigo no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), UNESP de Rio Claro (ver bibliografia), referente ao aspecto metodológico da utilização da história da matemática no ensino da matemática. Naquele momento, dada a preocupação do autor em explicitar o aspecto metodológico da utilização da história num contexto mais geral, algumas questões históricas referentes ao ensino da geometria analítica acabaram aparecendo, porém de forma secundária. Já o objetivo do presente artigo, é o de destacar algumas considerações históricas da geometria analítica visando a melhoria de seu ensino, considerações essas apresentadas tendo como pré-requisitos a compreensão do papel da história da matemática para a melhoria do ensino da matemática já devidamente explicitada no artigo publicado no BOLEMA.

² Departamento de Educação - Faculdade de Ciências e Tecnologia – UNESP – 19060-900 - Presidente Prudente – Estado de São Paulo - Brasil.

O emprego da história da matemática no ensino desta ciência tem sido uma alternativa muito apontada por educadores interessados na melhoria do ensino da matemática.

No entanto, o uso da história no ensino tem se concretizado em ações que não tem apontado para uma possível intervenção na própria elaboração dos conceitos. O que se tem visto, é a história da matemática sendo utilizada como um recurso informativo ou ilustrativo para o ensino de determinado conceito ou tópico (Jardinetti, 1994, 1996)³.

Embora seja importante a utilização da história da matemática da forma ilustrativa ou informativa, essa utilização pouco contribui para o entendimento da própria lógica dos conceitos.

A história da matemática demonstra que esta ciência é elaborada segundo uma lógica dinâmica que possibilita relações sobre relações. No entanto, o ensino da matemática tem promovido procedimentos em que a apropriação dos conceitos tem sido dada sem relações entre eles. Verifica-se existir uma situação contraditória. Ao mesmo tempo que o professor fala aos alunos da história de uma ciência belíssima, uma ciência cuja evolução se dá de forma dinâmica e por relações, esse mesmo professor realiza um ensino em que os conceitos são apropriados sem a compreensão das relações existentes entre eles, através de mecanismos arbitrários de memorização.

É preciso promover profundas reflexões quanto à relação entre a história da matemática e seu ensino de maneira que os procedimentos de ensino reflitam a riqueza e dinamicidade encontrada na história. É preciso buscar na história, os elementos necessários para a elaboração de seqüências lógicas de ensino, de forma que essas seqüências reflitam a história quanto a lógica intrínseca que rege a evolução dos conceitos.

Entre outros aspectos, é preciso entender a necessária diferenciação entre a função metodológica desempenhada pela investigação histórica no momento da fundamentação teórica do professor e a função metodológica da investigação histórica no momento da elaboração e execução de procedimentos de ensino.

Visando possibilitar uma melhor reflexão sobre a necessidade dessa diferenciação, a seguir serão apresentadas algumas considerações sobre o uso da história no ensino da matemática para o caso particular do ensino de geometria analítica (Jardinetti, 1991).

Primeiramente, é preciso observar que o ensino da geometria analítica não tem promovido procedimentos de ensino coerentes para a compreensão da lógica de elaboração dos conceitos da geometria analítica. As abstrações algébricas reduzem-se no ensino atual, à abstrações vazias,

desvinculadas de qualquer relação com seus correspondentes geométricos. A relação entre os conceitos algébricos e os conceitos geométricos no interior dos conceitos da geometria analítica, é reduzida a uma mera associação mecânica entre curva e equação com ênfase na manipulação das equações algébricas. O aluno recebe um conjunto de informações que são assimiladas através da operacionalização de determinadas fórmulas. Não são apresentados procedimentos de ensino que façam o aluno entender o processo de evolução da geometria analítica, a sua lógica de elaboração. Dá-se ênfase no cálculo algébrico, assim entendido enquanto manipulação de fórmulas por memorização, impossibilitando a compreensão da relação ali existente entre conceitos algébricos e geométricos. Ao procederem desta forma, esses procedimentos reduzem todo o processo de unificação entre as curvas e as equações a uma associação meramente mecânica entre um e outro.

Para a superação da ausência de relação entre álgebra e geometria promovida nos procedimentos de ensino da geometria analítica, se faz necessário compreender a gênese de seus conceitos. Para isso, a investigação histórica revela ser um fundamento para a compreensão da lógica de elaboração da geometria analítica.

No entanto, não basta somente ir à história. Não se trata somente de dominar certos aspectos da história da geometria analítica, pois, o que se procura na história é a compreensão da lógica de elaboração da geometria analítica. Portanto, o que se busca na investigação histórica não são fatos meramente históricos, mas sim, fatos na história que expliquem a lógica da elaboração da geometria analítica e, tendo em mãos esses elementos, verificar o que se tem feito hoje no ensino atual de geometria analítica que tem determinado uma ausência de relação entre álgebra e geometria.

A geometria analítica hoje presente no ensino de matemática retrata, como todo conceito escolar, os traços essenciais de toda a produção histórica desse conceito. Trata-se daquilo que é fundamental para que todo indivíduo possa se apropriar do conceito sem ter que refazer todos os percalços da evolução histórica. Portanto, não denota toda a história da geometria analítica, mas sim, aquilo que é essencial da evolução do conceito, isto é, os traços históricos essenciais.

Percebe-se assim, que ir à história é condição necessária para se captar a lógica do conceito, porém não é condição suficiente para a elaboração e execução de seqüências de ensino eficazes para a garantia da assimilação da lógica desse conceito. A história meramente factual não fornece a necessária organicidade lógica para execução de procedimentos de ensino. Em outras palavras, a história dos conceitos da geometria analítica não se realiza na mesma seqüência lógica dos aspectos essenciais de sua evolução presentes nos procedimentos de ensino. A história factual, cronológica, apresenta uma série de informações, elementos, caminhos não só desnecessários para a compreensão, pelo educador, da lógica de

³ O sobrenome JARDINETTI foi retificado para GIARDINETTO. Assim, José Roberto Boettger Jardinetti e José Roberto Boettger Giardinetto são referências do mesmo autor.

elaboração dos conceitos, como até mesmo desviadores em relação aos aspectos fundamentais (Engels in Duarte, 1987, p.25). O educador, não dispondo de um instrumental metodológico-investigativo não consegue diferenciar os momentos fundamentais daqueles não fundamentais com vista a elaboração e execução de procedimentos de ensino relacionais e dinâmicos.

Portanto, não se trata de simplesmente reproduzir a história, mas sim, de reproduzir a essência da lógica das relações do conhecimento na sua forma atual, os traços essenciais que sintetizam de forma lógica o desenvolvimento histórico desse conteúdo. Não basta utilizar a história como um fundamento para o professor ter um maior entendimento da gênese dos conceitos, é preciso utilizar a história para promover a elaboração e execução de procedimentos de ensino.

Diante destes fatos, o ponto de partida da investigação histórica para a intervenção no ensino da geometria analítica são os conceitos atuais que compõem o ensino de geometria analítica. Ora, esse ensino não promove uma relação entre álgebra e geometria.

O que se verifica em muitos livros didáticos, é a existência de muito pouca referência histórica a respeito da gênese da geometria analítica (por exemplo lezzi(1983, p.1-g) e Bongiovanni, Leite, Laureano (1993, p.133)). Em linhas gerais, os livros didáticos tão somente informam que a geometria analítica é um ramo da matemática elaborado por Descartes (interessante verificar que em sua maioria, não fazem referência a Fermat) a partir do desenvolvimento dos conceitos algébricos num estágio em que foi possível a utilização desses conceitos na análise dos procedimentos geométricos dos antigos geometras gregos. Criava-se assim, a possibilidade de unificação entre álgebra e geometria.

No entanto, ao mesmo tempo que os livros didáticos fazem referências à história da geometria analítica, esses mesmos livros didáticos não explicitam a lógica interna que possibilitou essa unificação e, muito menos, promovem procedimentos de ensino que viabilizem a apropriação dessa lógica e a conseqüente compreensão do que seja efetivamente geometria analítica.

É preciso então recuperar na história, a lógica que possibilitou a relação entre geometria e álgebra, constituindo assim, a geometria analítica e, então, executar a elaboração de procedimentos de ensino fiéis a essa lógica. Essa recuperação se dá a partir da análise dos conceitos atuais de geometria analítica. Se a geometria analítica possibilitou uma unificação entre álgebra e geometria, é preciso verificar na história o desenvolvimento da geometria, o desenvolvimento da álgebra e porque, antes de Descartes, não foi criada condições para essa unificação.

A síntese dessa investigação histórica pode ser assim retratada (maiores detalhes podem

ser lidos diretamente na obra do autor (Jardinetti, 1991, p.72-208)).

A geometria analítica foi inicialmente elaborada por René Descartes(1596-1650) e Fermat(1601-1655). Em Descartes, as primeiras idéias da geometria analítica foram apresentadas na obra "Geometria", um apêndice do seu livro "Discurso do Método - Para Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências" publicado em 1637. Já em Fermat essas idéias estão presentes na sua obra "Ad locus planos et solidos isagoge" ("Introdução aos Lugares Planos e Sólidos") publicada somente após sua morte.

Os conceitos apresentados nessas obras foram elaborados a partir da utilização dos conceitos algébricos desenvolvidos nessa época na análise dos resultados da geometria euclidiana. Essa utilização determinou uma unificação entre os processos algébricos e geométricos até então existentes, propiciando um avanço para a compreensão das próprias especificidades presentes na álgebra e na geometria.

Até então, havia processos de construções geométricas que, apesar, de bastante desenvolvidos, eram, entretanto, heterogêneos. Cada matemático utilizava um processo próprio.

A geometria analítica surge como um recurso inovador porque passou a utilizar processos algébricos para homogeneização dos procedimentos geométricos, através de uma reorientação com base na similariedade de idéias de cada problema.

Se, por um lado, na geometria analítica há o esclarecimento das construções geométricas pelo enfoque algébrico, por outro lado, as próprias expressões algébricas através de suas equações, passaram a ser melhor interpretadas pelo auxílio de suas representações geométricas construídas pelos conceitos reelaborados pela geometria analítica.

Na Grécia antiga, as propriedades intrínsecas da figura geométrica eram analisadas através dos conceitos da geometria euclidiana.

A riqueza da geometria grega permitiu o surgimento dos primeiros trabalhos algébricos, trabalhos estritamente vinculados às figuras geométricas. Mas a geometria euclidiana, se, por um lado, permitiu o surgimento dos primeiros resultados algébricos, por outro lado, logo se revelaria cerceadora do pleno desenvolvimento algébrico.

Ocorre que a base numérica da matemática grega não era flexível o bastante para a elaboração de símbolos algébricos próprios. O tratamento geométrico dado à grandezas incomensuráveis determinou o desenvolvimento de uma "álgebra" com feições totalmente geométricas. Essa "álgebra geométrica" vai determinar um impulso cada vez maior a processos heterogêneos de construções geométricas, bem como, determinar a impossibilidade de se elaborar instrumentos algébricos próprios desvinculados dessa empiria geométrica.

É importante observar que para o entendimento da geometria analítica, a investigação histórica no momento da análise da geometria antiga, também aponta um outro elemento fundamental. Trata-se da noção de coordenadas geométricas. É muito interessante esse fato porque a geometria euclidiana lança os primeiros indícios daquilo que Descartes, muitos séculos mais tarde, pode apreender sob a óptica de uma álgebra já bastante desenvolvida e assim, lançar as bases fundamentais da geometria analítica.

As primeiras noções abstratas de coordenadas geométricas surgiram nos estudos geométricos de Menaecmo(375-325 a.C.) e de Apolônio(aproximadamente 260 a 200 a.C.). Trata-se de um conceito de coordenadas muito distante do conceito hoje entendido.

As coordenadas em Menaecmo e Apolônio apareciam através de eixos de referências utilizados posteriormente à curva para o estudo de suas propriedades.

Interessante observar que nos trabalhos desses geométricos, as equações eram obtidas pelas curvas, e não que as curvas fossem obtidas pelas equações que as representassem. Não existia, nos procedimentos adotados, uma biunidade entre curva e equação, biunidade essa, hoje existente na geometria analítica. Porém, os estudos de Menaecmo e Apolônio foram decisivos para as inovações matemáticas apresentadas por Descartes séculos mais tarde.

O atrelamento à figura geométrica, se antes era motivo de avanço das expressões algébricas, com o tempo revelou-se entrave para seu desenvolvimento. Tornou-se indispensável para o pleno aprimoramento algébrico, novas condições que não fossem as que fundamentavam a geometria euclidiana. Essas condições foram dadas pela matemática hindu e árabe.

O que se vê, com a colaboração desses povos, é um impulso maior para o desenvolvimento algébrico, apesar de uma fase inicial muito ligada à influência grega, tanto que os resultados algébricos obtidos eram confirmados em sua veracidade lógica pelos procedimentos geométricos gregos. Mas aos poucos a álgebra foi se firmando em sua autonomia. No entanto, a construção dessa autonomia foi se realizando na sua dicotomia em relação à geometria grega, isto é, os processos algébricos e euclidianos foram sendo interpretados de forma dissociada.

A autonomia algébrica vai encontrar seu limite máximo, quando se transforma em instrumento próprio de investigação dos próprios procedimentos geométricos que, historicamente, foram sua origem.

É o momento da síntese entre álgebra e geometria com o surgimento dos primeiros conceitos da geometria analítica com Descartes e Fermat.

Particularmente Descartes, ao perceber a relação entre as coordenadas e as figuras a partir do estudo sobre os trabalhos de Apolônio, acaba unificando as expressões algébricas às formas

concretas das figuras geométricas mediante a associação entre curvas e equações.

Trata-se de uma reinterpretação dos processos de construções geométricas dos gregos em que Descartes utilizou-se da álgebra já totalmente desenvolvida em sua época. Essa reinterpretação se deu pela análise do problema das três ou quatro retas formulado pelo matemático Pappus de Alexandria.

Descartes percebeu que as dificuldades dos gregos residiam no fato deles não terem conseguido desenvolver processos algébricos que levassem a elaboração do cálculo para aprimoramento do estudo das figuras. Foi exatamente o fato de ter compreendido estes limites da geometria grega que levou Descartes a considerar a importância dos cálculos algébricos desenvolvidos em sua época. Ele percebeu que a álgebra já desenvolvida e os métodos geométricos que vinham sendo desenvolvidos de forma cada vez mais heterogêneos se completavam, possibilitando um desenvolvimento mútuo.

Portanto, graças aos instrumentos matemáticos de sua época, isto é, a álgebra desenvolvida na Renascença e os processos geométricos dos antigos, Descartes elabora os primeiros conceitos da geometria analítica.

Com o progressivo desenvolvimento da geometria analítica, as propriedades geométricas das figuras passaram a ser profundamente esmiuçadas pelo auxílio da análise algébrica sem que essas expressões algébricas se limitassem às figuras geométricas que eram inicialmente o seu instrumento matemático de elaboração. Da mesma forma, com a geometria analítica, os processos algébricos passaram a ser melhor compreendidos mediante sua representação geométrica.

Como decorrência, percebe-se que no desenvolvimento histórico dos conceitos da geometria analítica os processos algébricos acabaram sendo instrumento para compreensão das figuras geométricas que lhe foram inicialmente ponto de partida e momentaneamente entrave para seu desenvolvimento.

Diante da investigação histórica, a partir dos aspectos essenciais presentes na constituição dos conceitos atuais de geometria analítica aqui apresentados, verifica-se que o seu ensino não tem promovido a compreensão da relação entre álgebra e geometria. Vê-se apenas uma exposição dos principais resultados algébricos mediante uma associação mecânica entre curva e equação. As expressões algébricas são reduzidas a fórmulas e as figuras geométricas recebem um papel secundário ao serem utilizadas apenas para justificar o modo de ser das expressões algébricas, isto é, apenas para comprovar, ao nível do desenho, a forma utilizada com símbolos algébricos.

Se a evolução histórica dos aspectos essenciais da geometria analítica retrata uma lógica regida por uma reciprocidade existente entre álgebra e geometria mediante um movimento de superação dos procedimentos geométricos pelos procedimentos

algébricos, então o ensino da geometria analítica necessita refletir essa lógica intrínseca a essa historicidade evidenciada. Em outras palavras, a execução e elaboração dos procedimentos de ensino da geometria analítica necessita promover o desenvolvimento de um raciocínio por relação que surge a partir da análise da figura geométrica e da forma algébrica correspondente.

Esse raciocínio por relação, deveria iniciar-se já no momento da apresentação das coordenadas geométricas. A investigação histórica mostra o conceito de coordenadas cartesianas como sendo o elemento mediador na relação entre as figuras geométricas e suas correspondentes expressões algébricas.

No entanto, nos procedimentos de ensino em geral, o conceito de coordenadas é apresentado de forma mecânica. Não se esmiúça os aspectos relacionais aí implícitos entre os processos algébricos e geométricos - a essência da geometria analítica. Com os primeiros conceitos que se seguem, isto é, equação da reta, circunferência, etc, o sistema cartesiano freqüentemente passa a não ser empregado. As resoluções se dão através da execução de fórmulas e quando as coordenadas são utilizadas, isto se dá apenas como uma técnica para "desenhar" a reta ou cônica encontrada através da equação algébrica. Com a absolutização do cálculo algébrico presente no ensino, toda a geometria analítica é direcionada para resolução mecanizada de problemas que envolvam cálculos algébricos. Na medida que a lógica que permeia a elaboração dos conceitos não é respeitada, o conceito das coordenadas quase não é utilizado. Quando utilizado, restringe-se a procedimentos mecânicos para construção das figuras geométricas. Sua lógica de elaboração é reduzida a uma técnica para visualizar as figuras geométricas.

A correta apreensão do sistema cartesiano de coordenadas se dá em função da lógica de elaboração da correspondência biunívoca entre pontos e números reais a partir de um aspecto problemático que justifique sua gênese, e não numa forma imediata, dada, como um instrumento que com o decorrer dos conceitos justifica-se seu uso, mas nunca seu real significado.

A gênese do sistema cartesiano se deu a partir da necessidade de se interpretar os conceitos geométricos para a linguagem numérica através da quantificação dos pontos que determinam uma figura qualquer. Para isso, tornou-se necessário a elaboração de um instrumento matemático que propiciasse o estudo numérico da figura. Sendo assim, as coordenadas surgiram enquanto um procedimento próprio para determinar a posição de um ponto da figura através de sua representação numérica.

O procedimento implícito ao conceito de coordenadas apoia-se na possível correspondência entre números reais e pontos de uma reta mediante a construção de um ponto de origem como referência, uma unidade de medida e uma direção.

Diante da reciprocidade entre reta e números reais, fez-se possível a elaboração do sistema cartesiano de coordenadas. As coordenadas, ao retratarem a representação numérica dos pontos de uma figura, determinaram desta forma, a sua representação algébrica recíproca através da equação elaborada pelos números correspondentes aos seus pontos.

Como tal, a lógica implícita presente nas coordenadas reflete o aspecto relacional entre álgebra e geometria. A apresentação deste conceito em sala de aula precisa, necessariamente, se pautar na revelação desta correspondência, sem o que o raciocínio relacional não é apreendido pelo aluno.

Como subsídio para elaboração futura de procedimentos de ensino, sugere-se que para o caso das coordenadas, esse conceito seja apresentado aos alunos de forma a evidenciar a reciprocidade entre álgebra e geometria. Isto é, a construção do conceito de coordenadas deve-se dar, inicialmente, partindo de elementos geométricos para se chegar a seu correspondente elemento algébrico e, vice-versa, partindo de elementos algébricos, chegar a seus correspondentes elementos geométricos (Jardinetti, 1991, p. 263-75).

Compreendida a relação entre as expressões algébricas e geométricas a partir da apreensão correta do sistema cartesiano de coordenadas, os demais conceitos podem ser reelaborados de forma a refletirem também essa reciprocidade.

Se por um lado o conceito de coordenadas é o elemento mediador na relação entre as figuras geométricas e suas correspondentes expressões algébricas, por outro lado, a lógica intrínseca à história da evolução da geometria analítica evidencia também que a figura geométrica é a expressão concreta imprescindível para apreensão das estruturas algébricas abstratas. Em outras palavras, a figura geométrica constitui o fio condutor do raciocínio para apreensão dos conceitos da geometria analítica.

Assim, é fundamental para o ensino da geometria analítica, entender a figura geométrica como o elemento que vivifica a expressão algébrica abstrata. A forma algébrica, sem sua relação com a representação geométrica, torna-se para o aluno, uma abstração estéril. O cálculo algébrico processado na geometria analítica, se estrutura através do respaldo do concreto da figura geométrica. Isso no entanto, não quer dizer, que na geometria analítica a álgebra estaria "dependente" da geometria. A álgebra apresenta autonomia, porém na geometria analítica, ela precisa ser entendida na relação com a geometria.

O problema do ensino atual é que a autonomia algébrica é relevada ao extremo, perdendo-se com isso a necessidade da relação com a geometria. O ensino da geometria analítica atual limita-se a proceder cálculos algébricos e, com isso, perde-se a possibilidade de entendimento da relação com a geometria, essência do significado do que seja geometria analítica.

As figuras geométricas, de ponto de referência da relação com a álgebra, aparece no ensino atual como ilustração dos dados obtidos pelas fórmulas algébricas. Os dados geométricos não são abordados pelo enfoque da relação de reciprocidade com os resultados algébricos. A utilização ocorre através de uma redução dos aspectos relacionais, extraindo os dados geométricos estritamente necessários que justificam as fórmulas. Os dados geométricos aí aparecem sempre como elementos justapostos e não como condutores de um processo de apreensão dos conceitos desde o estágio de captação da lógica do processo de formação desses conceitos até o estágio de apreensão desses através da elaboração de exercícios.

Portanto, no ensino atual de geometria analítica, verifica-se que as expressões algébricas são reduzidas a fórmulas e as figuras geométricas recebem um papel secundário ao serem utilizadas apenas para justificar o modo de ser das expressões algébricas, isto é, apenas para comprovar ao nível do desenho a forma utilizada com símbolos algébricos. Dessa forma, a figura geométrica aparece como justaposição ao cálculo algébrico. Com isso, ela perde sua função de direção do raciocínio do aluno, direção esta que faz o aluno "visualizar" a figura geométrica no ato de desenvolver o cálculo algébrico.

Portanto, com a investigação histórica desenvolvida a partir dos traços essenciais da geometria analítica, verificou-se que a estrutura conceitual da geometria analítica retrata, na sua essência, uma reciprocidade existente entre álgebra e geometria mediante um movimento de superação dos procedimentos geométricos pelos procedimentos algébricos, através de uma inclusão desses em

relação a aqueles. Em função dessa lógica de elaboração, a execução de procedimentos de ensino ocorre mediante o desenvolvimento de um raciocínio por relação que surge a partir da análise da figura geométrica e da forma algébrica correspondente.

Se esse raciocínio por relação foi aquele que possibilitou o desenvolvimento do conhecimento matemático e o próprio surgimento da geometria analítica, os procedimentos de ensino precisam garantir uma seqüência lógica de raciocínio que permita ao aluno ir usando os dados por relação e não por justaposição. Isto, desde o momento da apropriação dos dados conceituais até a execução dos exercícios.

As considerações aqui colocadas evidenciam a importância da história para a elaboração e execução de procedimentos de ensino. Através da investigação histórica dos traços essenciais hoje constituídos no ensino de geometria analítica, foi possível entender a lógica que permeia a evolução desse tópico da matemática.

Interessante notar como os traços essenciais hoje constituídos se, por um lado, revelam aspectos norteadores para a investigação histórica, por outro lado, escondem aspectos que só mediante a investigação histórica, podem ser clarificados. Em outras palavras, a lógica do produto revela e esconde a lógica do processo (Duarte, 1987, p.13). No entanto, a lógica do processo acaba apontando para aspectos fundamentais que hoje no ensino são colocados como aspectos secundários, e por apresentarem-se de forma secundária, não são plenamente evidenciados, contribuindo para uma compreensão parcial e fragmentária da lógica dos conceitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AABOE, Asger. *Episódios da história antiga*. Rio de Janeiro: Paz, 1984.
- BONGIOVANNI, Vincenzo, LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto, LAUREANO, José Luiz Tavares. *Matemática e vida*. São Paulo: Ática, 1993, v.1.
- BOYER, C.B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1981.
- DESCARTES, R. La geometrie. In: COMPTE, Auguste. *La Geometrie analytique*. Paris: Typographie Edmond Monnoyer, 1894.
- DUARTE, N. *A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar*. São Carlos, 1987. 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação, Metodologia de Ensino) – UFSCAR.
- EVES, Howard. *Great moments in mathematics (before 1650)*. USA: The Mathematical Association of America, 1983.
- HEATH, T. *A history of greek mathematics*. New York: Dover Publications, s.d. v.1.
- IEZZI, G. et al. *Geometria analítica*. São Paulo: Atual, 1983 (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar – n. 7)
- JARDINETTI, José Roberto Boettger. A função metodológica da história para elaboração e execução de procedimentos de ensino na matemática. *Boletim de Educação Matemática, BOLEMA*, Rio Claro, n.10, p.75-82, 1994.
- JARDINETTI, José Roberto Boettger. *A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica a nível do 1º e 2º graus*. São Carlos, 1991. 298 p. Dissertação (Mestrado em Educação, Fundamentos da Educação) – UFSCAR
- JARDINETTI, José Roberto Boettger. A relação entre o lógico e o histórico: categoria subsidiadora da investigação histórica para

- elaboração de procedimentos de ensino na matemática. In: *História e educação matemática*. Braga, Portugal: Associação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade do Minho. 1996. v.2, p.265-8.
- KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University, 1980.
- LORIA, G. Pour une histoire de la geometrie analytique. In: *Verhandlungen des dritten internationalen mathematiker kongress*. Heidelberg: s.n., 1904.
- LOWELL, Jullian C. *A history of the conic sections and quadric surfaces*. Oxford: Clarendon, 1945.